Série 0 - Algèbre linéaire et analyse

1 Diagonalisation d'une matrice

Objectif : diagonalisation d'une matrice 2×2.

Théorie : algèbre linéaire.

Difficulté : ★☆☆☆ facultatif.

En mécanique quantique, on considère une observable physique décrite par un opérateur linéaire qui est un automorphisme d'un espace vectoriel abstrait appelé espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Cet opérateur est une application linéaire représentée dans la base cartésienne $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension 2 par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} .$$

(a) Calculer la transposée A^t, le carré A^2, le cube A^3, la trace $\operatorname{tr} A$, le déterminant $\det A$ et l'inverse A^{-1}.

(b) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A et ses vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ à un facteur près.

(c) Déterminer la matrice de passage P de la base cartésienne à la base propre dans la base propre et calculer son inverse P^{-1}.

2 Séries et développements de Taylor

Objectif : calculer les séries et développements de Taylor de fonctions explicites, implicites et intégrales.

Théorie : analyse réelle.

Difficulté : ★★☆☆ facultatif.

Déterminer les séries de Taylor des fonctions suivantes à un ordre raisonnable :

(a) La fonction de Spence ou le dilogarithme,

$$F(x) = \mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt .$$

(b) La composition de fonctions trigonométriques,

$$F(x) = \sin(\tan x) - \tan(\sin x) \ .$$

(c) La composition de fonctions,

$$F(x) = f(g(x)) - g(f(x)) \ ,$$

où f et g sont des fonctions impaires dont les dérivées à l'origine sont,

$$f'(0) = g'(0) = 1 \ .$$

(d) La fonction $F(x)$ solution de l'équation différentielle,

$$x(1-x)F''(x) + (c - (a+b+1)x)F'(x) - ab\,F(x) = 0 \,,$$

satisfaisant la condition initiale $F(0) = 1$ et analytique autour de $x = 0$. Utiliser le symbole de Pochhammer,

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \ .$$

3 Matrice de rotation

Objectif : déterminer la structure de la matrice de rotation autour d'un axe.

Théorie : algèbre linéaire I.

Difficulté : ★★★★ facultatif.

On considère une rotation d'angle θ autour d'un axe de vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ passant par l'origine O. La matrice de rotation $R(\theta)$ se décompose en une partie isotrope indépendante de $\boldsymbol{n}$, une partie symétrique sans trace et une partie antisymétrique. Ainsi, en coordonnées cartésiennes, les composantes du vecteur unitaire sont n_i où $i = 1, 2, 3$ et les composantes de la matrice de rotation sont,

$$R_{ij}(\theta) = A(\theta)\,\delta_{ij} + B(\theta)\,n_i\,n_j + C(\theta)\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,n_k \qquad \text{où} \qquad i,j = 1,2,3$$

compte tenu du delta de Kronecker δ_{ij} et du symbole de Levi-Civita ε_{ijk}.

(a) Déterminer les coefficients $A(\theta)$, $B(\theta)$ et $C(\theta)$.

(b) Calculer la trace $\mathrm{tr}(R(\theta))$ et le déterminant $\det(R(\theta))$ de la matrice de rotation $R(\theta)$ et en déduire une interprétation géométrique.

4 Représentations en mécanique quantique

⦿ **Objectif** : initiation à la mécanique quantique.
📖 **Théorie** : analyse complexe.
✍ **Difficulté** : ★★★★ facultatif.

En mécanique quantique, l'évolution temporelle est décrite par les opérateurs en représentation d'Heisenberg et par les états en représentation de Schrödinger. Un opérateur linéaire $\hat{A}\,(t) \in \mathcal{L}\,(\mathcal{H})$ en représentation d'Heisenberg est lié à l'opérateur linéaire correspondant $\hat{A} \in \mathcal{L}\,(\mathcal{H})$ en représentation de Schrödinger par la relation,

$$\hat{A}\,(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\,t\,\hat{H}}\,\hat{A}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,t\,\hat{H}}\,,$$

où $\hbar$ est la constante de Planck réduite, $\hat{H} \in \mathcal{L}\,(\mathcal{H})$ est l'hamiltonien et $\mathcal{L}\,(\mathcal{H})$ est l'espace vectoriel des opérateurs linéaires agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ décrivant les états. La non-commutativité entre les opérateurs $\hat{H}$ et $\hat{A}$ est décrite par le commutateur,

$$[\hat{H},\hat{A}] = \hat{H}\,\hat{A} - \hat{A}\,\hat{H}\,.$$

(a) Calculer les dérivées temporelles première et seconde de l'opérateur linéaire $\hat{A}\,(t)$.

(b) Dans la limite où le temps est suffisamment court, exprimer la relation entre les opérateurs linéaires $\hat{A}\,(t)$ et $\hat{A}$ au premier ordre.

5 Identités vectorielles

⦿ **Objectif** : démontrer des relations d'analyse vectorielle capitales en physique.
📖 **Théorie** : analyse vectorielle.
✍ **Difficulté** : ★★★★ facultatif.

Montrer les identités vectorielles différentielles suivantes :

(a) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\,\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\nabla} f\cdot\boldsymbol{V} + f\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}\,,$

(b) $\boldsymbol{\nabla}\times(f\,\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\nabla} f\times\boldsymbol{V} + f\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}\,,$

(c) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{\nabla}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{V}\,,$

(d) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{A}\,,$

où f est un scalaire et $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des vecteurs.

6 Ondes électromagnétiques

Objectif : appliquer l'analyse vectorielle afin d'obtenir une description des ondes électromagnétiques.

Théorie : analyse vectorielle.

Difficulté : ★☆☆☆ facultatif.

Les quatre équations de Maxwell s'écrivent,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho\,,\\
&\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0\,,\\
&\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,,\\
&\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\,.
\end{aligned}$$

Dans le vide, la densité de charge électrique et la densité de courant électrique sont nuls,

$$\rho = 0 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}\,,$$

et les champs électromagnétiques sont liés par les relations phénoménologiques linéaires,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\,\boldsymbol{E} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0\,\boldsymbol{H}\,.$$

(a) Dans le vide, déterminer les équations d'ondes pour le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et le champ magnétique $\boldsymbol{B}$.

(b) En déduire la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

7 Invariance de jauge en électrostatique et magnétostatique

Objectif : appliquer l'analyse vectorielle et les fonctions de Green à l'étude des potentiels électromagnétiques.

Théorie : analyse vectorielle.

Difficulté : ★★★☆ facultatif.

Le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ est localement lié au potentiel magnétostatique $\boldsymbol{A}$ par la relation suivante,

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}\,.$$

A l'aide du théorème de Stokes, l'intégrale du champ magnétique $\boldsymbol{B}$ sur une surface S est liée à l'intégrale du potentiel magnétostatique $\boldsymbol{A}$ sur le contour fermé $C = \partial S$ correspondant au bord de cette surface,

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}\,,$$

où $d\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur surface infinitésimale orthogonale à celle-ci et $d\boldsymbol{r}$ est le vecteur déplacement infinitésimal orienté selon la règle de la main droite par rapport à $d\boldsymbol{\sigma}$.

(a) Montrer que la relation globale entre le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ et le potentiel magnétostatique $\boldsymbol{A}$ est invariante par la transformation de gauge,

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\,\phi\,.$$

8 Moment cinétique quantique

Objectif : déterminer le commutateur des composantes de l'opérateur moment cinétique quantique.

Théorie : analyse vectorielle.

Difficulté : ☆☆★★ facultatif.

En mécanique classique, le vecteur moment cinétique orbital s'écrit,

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}\,.$$

A l'aide du principe de correspondance, les vecteurs position et quantité de mouvement sont remplacés par les opérateurs correspondants :

$$\boldsymbol{r} \to \hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\,\hat{1}\,,$$
$$\boldsymbol{p} \to \hat{\boldsymbol{p}} = -\,i\hbar\,\boldsymbol{\nabla}\,,$$

où $\hat{1}$ est l'opérateur linéaire identité et $\boldsymbol{\nabla}$ est l'opérateur linéaire gradient.

(a) Déterminer les composantes cartésiennes $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}_z$ de l'opérateur vectoriel moment cinétique orbital quantique $\hat{\boldsymbol{L}}$.

(b) Montrer que le commutateur des composantes des opérateurs quantité de mouvement $\hat{p}_j$ et position $\hat{x}_k$ s'écrit,

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] \equiv \hat{x}_j\,\hat{p}_k - \hat{p}_k\,\hat{x}_j = i\hbar\,\delta_{jk}\,\hat{1} \qquad \text{où} \qquad j,k = 1,2,3\,,$$

en faisant agir ces opérateurs sur une fonction d'onde $\Psi\,(x_1, x_2, x_3)$.

(c) A l'aide du résultat précédent, montrer que le commutateur des composantes $\hat{L}_j$ et $\hat{L}_k$ de l'opérateur moment cinétique s'écrit,

$$\left[\hat{L}_j, \hat{L}_k\right] \equiv \hat{L}_j\,\hat{L}_k - \,\hat{L}_k\,\hat{L}_j = i\hbar \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{jk\ell}\,\hat{L}_\ell \qquad \text{où} \qquad j,k,\ell = 1,2,3\,.$$

(d) A l'aide du résultat précédent, montrer que le commutateur de la projection de l'opérateur vectoriel moment cinétique orbital quantique $\hat{\boldsymbol{L}}$ selon deux vecteurs quelconques $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ s'écrit,

$$\left[\boldsymbol{u}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}, \boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\right] = i\hbar\,(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\,.$$

9 Diffusion de la chaleur

⦿ **Objectif** : étude des équations aux dérivées partielles décrivant la diffusion de la chaleur.

📖 **Théorie** : analyse complexe, thermodynamique.

✍ **Difficulté** : ☆☆☆☆ facultatif.

On considère une barre infiniment longue avec une température initiale uniforme T_0 orientée le long de l'axe des abscisses tel que $x \geqslant 0$. Au temps initial $t = 0$, l'extrémité gauche de la barre situé en $x = 0$ est chauffée puis maintenue à température $T_1 > T_0$. La chaleur diffuse alors dans le reste de la barre. Cette diffusion est décrite par l'équation de diffusion de la chaleur,

$$\frac{\partial T\,(x,t)}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 T\,(x,t)}{\partial x^2}\,,$$

où λ est la constante de diffusivité thermique.

(a) Ecrire la température comme une fonction d'une variable sans dimension,

$$T\,(x,t) = f\,\Big(\eta\,(x,t)\Big) \quad \text{où} \quad \eta\,(x,t) = \frac{x^2}{\lambda\,t}\,.$$

Montrer que l'équation de diffusion de la chaleur peut s'écrire comme,

$$4\,\eta\,\frac{d^2 f\,(\eta)}{d\eta^2} + (\eta+2)\,\frac{df\,(\eta)}{d\eta} = 0\,.$$

(b) Montrer que la fonction $f\,(\eta)$ est donnée par la solution intégrale,

$$f\,(\eta) = A\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{\eta'}}\,\exp\left(-\,\frac{\eta'}{4}\right)d\eta'\,,$$

où A est une constante qui dépend de η_0.

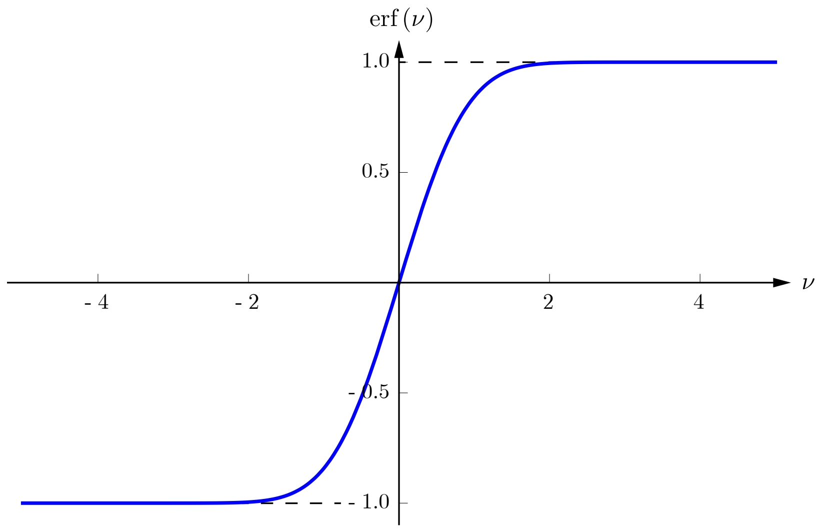

FIGURE 1 – Fonction d'erreur erf (ν)

(c) A l'aide de la fonction d'erreur erf (ν), définie comme (Fig 1),

$$\operatorname{erf}(\nu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\nu} \exp\left(-\,\nu'^2\right) d\nu' \,,$$

qui est une fonction impaire satisfaisant les limites suivantes,

$$\lim_{\nu \to -\infty} \operatorname{erf}(\nu) = -\,1 \,, \qquad \lim_{\nu \to 0} \operatorname{erf}(\nu) = 0 \,, \qquad \lim_{\nu \to \infty} \operatorname{erf}(\nu) = 1 \,,$$

montrer que le profil de température $T(x,t)$ le long de la barre au cours du temps est le suivant,

$$T(x,t) = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\lambda\, t}}\right) .$$